Zeitdiskrete, digitale Filter

und

schnelle Fourier-Transformation (FFT)

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeines Filter

Ein Filter ist ein System, das ein Eingangssignal mit einer Übertragungsfunktion verknüpft und dieses veränderte Signal an seinem Ausgang zur Verfügung stellt.
Eine Beschreibung des mathematischen Zusammenhanges von Eingangs- und Ausgangssignal ist im Zeitbereich und im Frequenzbereich möglich.

Der Zeitbereich kann kontinuierlich sein (Beispiel: analoges Tiefpass-Filter, entweder als RCL-Netzwerk oder mit Operationsverstärkern (OPV) realisiert) oder zeitdiskret.
Zeitdiskret bedeutet, das ein Signal nur zu bestimmten Zeitpunkten abgetastet wird. Des Weiteren unterscheidet man nicht nur zwischen zeit-kontinuierlich und zeit-diskret, sondern auch zwischen wert-kontinuierlich und wert-diskret.
Diskrete Werte erhält man durch die Abtastung eines analogen Signals mit Hilfe eines Analog-Digital-Wandlers (ADC), da in digitalen Zahlensystemen der Wertevorrat endlich ist (abgestuft). Dieser Vorgang wird Quantisierung genannt. Für eine Signalbearbeitung mit einem Prozessor oder DSP muss das Eingangssignal abgetastet werden, d.h. es muss zeit- und wertdiskret sein. Der Vorteil der digitalen Signalverarbeitung mit Prozessoren und der damit verbundenen Flexibilität wird durch das sogenannte „Quantisierungsrauschen“ erkauft. Dieses entsteht durch die Abtastung, wenn der analoge Wert zwischen zwei Quantisierungsstufen liegt.

Beispiele: Die analoge Ausgangsspannung einer Spannungsquelle ist zeit- und wertkontinuierlich.
Die Ausgangsspannung eines Digital-Analog-Wandlers (DAC) ist zeitkontinuierlich, aber wertdiskret.
Ein ADC liefert ein zeit- und wertdiskretes Signal. Der ADC misst zu definierten Zeitpunkten das Eingangssignal und liefert eine Bitfolge, die der Eingangsspannung entspricht.

2 Filter auf dem Signalprozessor

Das Realisieren der Filter auf dem Signalprozessor hat sehr grosse Vorteile.
Diese Filter sind in Bezug auf Grenzfrequenzen und Parameter frei konfigurierbar, da sie digital realisiert sind und durch Ändern des Algorithmus oder der Parameter auf beliebige Anforderungen adaptieren lassen. Die Einschränkungen analoger Filter, dass sie nur für bestimmte Filtertypen (Tiefpass, Hochpass, Bandpass, Bandsperre, ...) anwendbar sind und sich nur in Hinsicht auf Grenzfrequenzen und Flankensteilheit konfigurieren lassen.
Die digitalen Filter hingegen sind mathematische Algorithmen, die sich leicht austauschen oder durch geänderte Parameter auf die jeweiligen Anforderungen anpassen lassen.
Ein weiterer großer Vorteil liegt in der Struktur der Onlinefunktionen, die weiterhin auf dem DSP gerechnet werden können. Die Filter können nicht nur direkt am Eingang der Messkarte gerechnet werden, was mit analogen Filtern auch möglich wäre, sondern sie können beliebig in der Messkette eingehängt werden. So können Trigger auf ungefilterte Daten durchgeführt werden, während die Messwerte, die später angezeigt werden, durch Filter von unerwünschten Frequenzanteilen bereinigt werden. Oder eine FFT auf die ungefilterten Daten mit gleichzeitiger Filterung der analogen Nutzdaten. Durch die flexible Struktur und hohe Anpassungsfähigkeit sind den Einsatzgebieten keine Grenzen gesetzt.

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0 Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de

Die hohe Geschwindigkeit der eingesetzten Signalprozessoren erlaubt auch komplexe Filterungen auf dem Signalprozessor ohne hohe Performanceeinbußen.

3 Zusammenhang Zeitsignal und Frequenzspektrum

3.1 Bestimmung des Spektrums periodischer Signale mit der Fourier-Reihe

Ein Möglichkeit, Signale zu beschreiben und zu analysieren, ist eine Beschreibung und Analyse im Zeitbereich.
Beispiel:
Allgemeiner Sinus-Schwingung:

$$x(t) = \hat{x} \cdot \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$$

Bedeutung der Symbole:

$x(t)$	:	Amplitude zu einem bestimmten Zeitpunkt t
$\hat{x}$	:	maximale Amplitude
f_0	:	Frequenz der Schwingung
t	:	zu betrachtender Zeitpunkt
φ	:	Phasenverschiebung

Annahme:
Es liegt ein periodisches Signal vor.

T:	Periodendauer des periodischen Signals
$\varpi_0 = \frac{2\pi}{T}$	Kreisfrequenz des periodischen Signals

Um ein periodisches Signal zu analysieren, wird das Signal mit der Fourierreihe in sinus- und cosinus-förmige Anteile zerlegt.
Der französische Mathematiker Fourier entdeckte, das jedes periodische Signal in viele einzelne sinus- und cosinusförmige Schwingungen zerlegt und auch durch diese nachgebildet werden kann.
Er entwickelte das mathematische Werkzeug der Fourier-Analyse. Mit einer Reihenentwicklung gelang es ihm, jedes periodische Signal durch eine unendliche Summe von mit Koeffizienten bewerteten Sinus- und Cosinus-Schwingungen zu beschreiben. Die Unendlichkeit ist eine mathematische Besonderheit, die in der Realität schwierig zu handhaben ist. Fourier wies nach, das eine endliche Anzahl von Summanden ausreichend ist, um ein periodisches Signal annähernd zu beschreiben. Durch den Abbruch der Reihenentwicklung entspricht die nachgebildete Funktion nicht mehr der Originalfunktion. Durch Verwendung von genügend Summanden kann die Originalfunktion beliebig genau angenähert werden.

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0 Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de

3.1.1 Reelle Fourierreihe:

Die relle Fourierreihe hat die Form

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)\right]$$

Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} x(t)\, dt$$

a_0 ist der Gleichanteil oder Offset des Signals. Liegt das Signal symmetrisch zur Zeitachse, ist der Gleichanteil Null.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t=0}^{T} x(t) \cdot \cos(2\pi n f_0 t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t=0}^{T} x(t) \cdot \sin(2\pi n f_0 t)\, dt$$

3.1.2 Komplexe Fourierreihe:

Die komplexe Form der Fourierreihe ist:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n \cdot e^{j2\pi n f_0 t}$$

Komplexe Fourierkoeffizienten:

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_{o}^{T} x(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t}$$

Die komplexen Fourier-Koeffizienten sind spiegelsymmetrisch zur Y-Achse. Damit sind rein mathematisch negative Frequenzen möglich.

3.1.3 Darstellung der Koeffizienten der Fourierreihe in Frequenz- und Phasenspektren

Da eine Funktion durch eine reelle und eine komplexe Fourierreihe dargestellt werden kann, muss es einen Zusammenhang zwischen der reellen und der komplexen Fourierreihe geben.
Dieser Zusammenhang wird über die Koeffizienten gebildet.

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0 Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de

Die komplexen und reellen Koeffizienten lassen sich ineinander umrechnen.

$$\underline{c}_0 = a_0$$

$$\underline{c}_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad \text{für positive n}$$

$$a_n = 2 \cdot \mathrm{Re}\{\underline{c}_n\}$$

$$b_n = -2 \cdot \mathrm{Im}\{\underline{c}_n\}$$

Diese Koeffizienten können in Spektren dargestellt werden. In diesem werden die Beträge der Koeffizienten über der Frequenz dargestellt. Das periodische Signal hat die Frequenz f_0. Diese wird als Grundfrequenz bezeichnet. Jeder Koeffizient gehört zu einem Vielfachen dieser Grundfrequenz. Der Index entspricht dem Vielfachen.

a_0 gehört zu $0 \cdot f_0$ (dieser Wert entspricht dem Gleichanteil)

a_1 gehört zu $1 \cdot f_0$

a_2 gehört zu $2 \cdot f_0$

Das gleiche gilt für die $\underline{c}_n$ und b_n.

Die reellen Koeffizienten a_n und b_n können in verschiedene Spektren eingetragen werden. Man erhält das Sinus-Spektrum und das Cosinus-Spektrum.

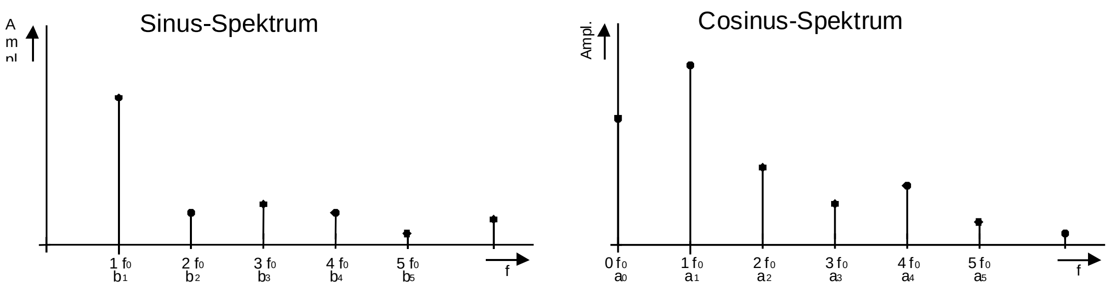


Abbildung 1: Sinus- und Cosinus-Spektrum

Beispiel:

Eine alternative Darstellung ist das Zusammenfassen der a_n und b_n.
Man bildet das

Betragsspektrum $A = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

und das Phasenspektrum $\varphi = -\arctan\frac{b_n}{a_n}$

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0 Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de

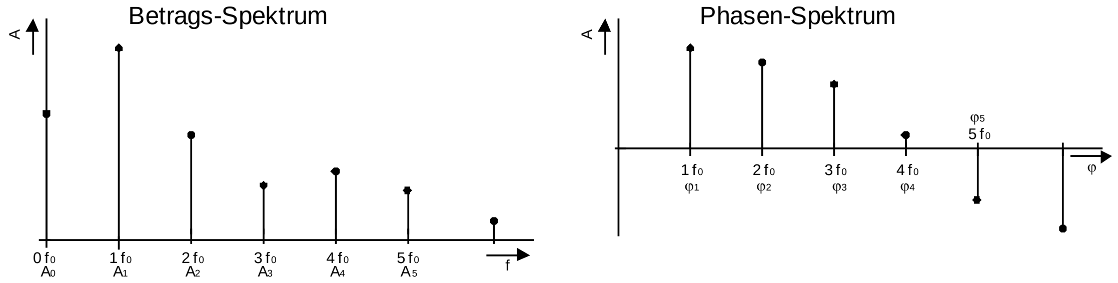


Abbildung 2: Betrags- und Phasenspektrum

Werden statt der a_n und b_n die $\underline{c}_n$ verwendet, ergeben sich bis auf den konstanten Faktor

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

die gleichen Diagramme. Die $\underline{c}_n$ sind symmetrisch zur Y-Achse. Daher gibt es bei den Frequenzen $-n \cdot f_0$ ebenfalls Koeffizienten. Werden diese mit den positiven Frequenzanteilen zusammengefasst, ergibt sich auch betragsmäßig das gleiche Betrags- und Phasen-Spektrum wie bei Verwendung der a_n und b_n .

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0 Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de

3.2 Bestimmung des Spektrums nichtperiodischer Signale mit der Fourier-Transformation

Einmalige (nichtperiodische) Signale werden mit der Fourier-Transformation analysiert.

3.2.1 Fourier-Transformation

$$\underline{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft}\, dt$$

3.2.2 Inverse Fourier-Transformation

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(f) \cdot e^{j2\pi ft}\, df$$

Die Fourier-Transformierte eines Signals kann in einen Betragsanteil und einen Phasenanteil zerlegt werden:

$$\underline{X}(f) = \left|\underline{X}(f)\right| \cdot e^{-j\varphi(f)}$$

die jeweils in Spektren dargestellt werden können.

Allerdings ergeben sich nicht Linienspektren wie bei der Fourierreihe, sondern kontinuierliche Spektren.

3.2.3 Übergang von periodischen zu einmaligen Signalen

Die Ursache liegt darin, das man bei der Fourier-Transformation davon ausgeht, das das einmalige, also nichtperiodische Signal eine Periodendauer T von unendlich hat.

Aus dem Diagramm unten ist zu erkennen, das mit zunehmender Periodendauer T die Anzahl der Koeffizienten zunimmt. Wird der Grenzübergang für durchgeführt, so geht die Anzahl der Koeffizienten ebenfalls gegen unendlich.
Es ist zu erkennen, dass das kontinuierliche Spektrum des untersten Signals die Einhüllende der oberen beiden Spektren ist.

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0   Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de

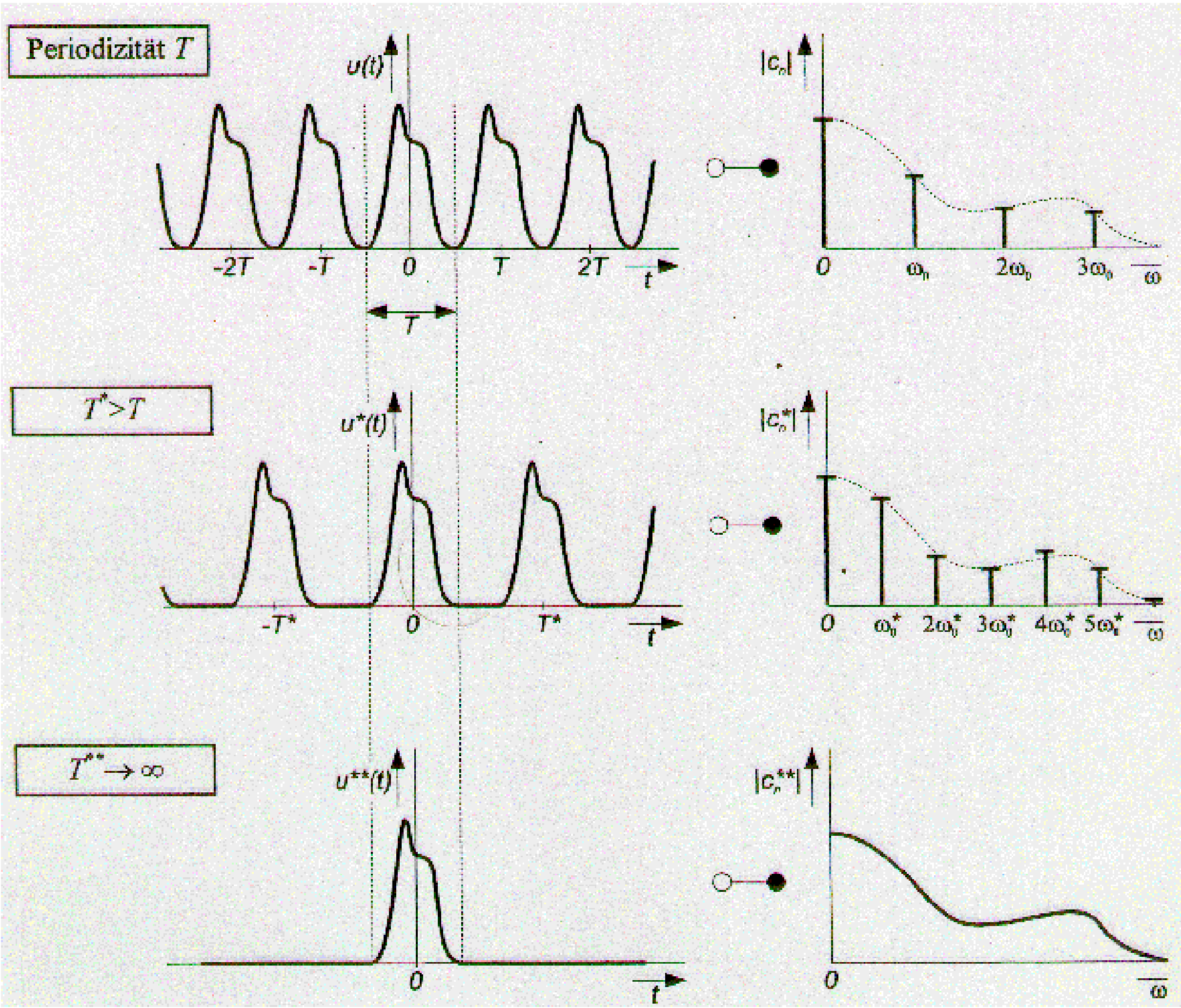


Abbildung 3: Übergang von periodischen zu nichtperiodischen Signalen

4 Unterscheidung Zeit- und Frequenzbereich

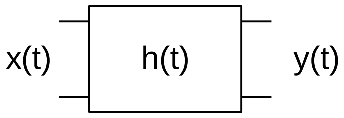
Vom Zeitbereich in den Frequenzbereich gelangt man mit Hilfe einer speziellen Transformation, der Fourier-Transformation. Eine Transformation vom Frequenz- in den Zeitbereich ist über die inverse Fourier-Transformation möglich.

$$\text{Zeitbereich} \quad \underset{\text{inverse Fourier-Transformation}}{\overset{\text{Fourier-Transformation}}{\rightleftarrows}} \quad \text{Frequenzbereich}$$

Bei der Lösung von mathematischen Problemen wird oft in Frequenzbereich ausgewichen, da im Frequenzbereich viele mathematische Zusammenhänge erheblich einfacher zu beschreiben und zu berechnen sind.

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0   Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de

4.1 Allgemeines System im Zeitbereich

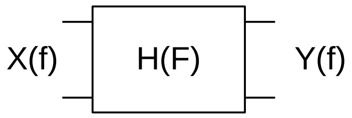


x(t) Eingangssignal
h(t) eine Funktion, die das System beschreibt (Impulsantwort)
y(t) Ausgangsfunktion

Im Zeitbereich wird das Ausgangssignal mit Hilfe des Faltungs-Integrals berechnet:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{t} x(t-\tau) \cdot h(\tau)\, d\tau$$

4.2 Allgemeines System im Frequenzbereich



X(f) Fourier-Transformierte des Eingangssignals
H(f) eine Funktion, die das System beschreibt (Übertragungsfunktion, Fourier-Transformierte der Impulsantwort aus dem Zeitbereich)
Y(f) Fourier-Transformierte des Ausgangssignals

Im Frequenzbereich wird das Ausgangssignal mit Hilfe einer Multiplikation berechnet:
$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$

Da eine Multiplikation leichter und schneller zu berechnen ist, wird trotz des Aufwandes der Fourier-Transformation und ihrer Inversen oft in den Frequenzbereich ausgewichen, da dort viele Zusammenhänge anschaulicher erklärt und berechnet werden können. Trotz der zwei nötigen Transformationen kann z.B. eine Faltung durch eine Multiplikation im Frequenzbereich schneller berechnet werden.

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0 Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de

5 Zeitdiskreter Bereich

Im zeitdiskreten Bereich finden sich viele Analogien zum zeitkontinuierlichen Bereich. Die Frequenzen werden hier oft auf die Abtastfrequenz nomiert:

$$\Omega = 2\pi \frac{f}{f_a},$$

wobei f_a die Abtastfrequenz ist. Frequenzen im Bereich $0 \le f \le f_a$ werden auf den Bereich $0 \le \Omega \le 2\pi$ abgebildet.

5.1 Zeitdiskrete Fourierreihe

Ein zeitdiskretes Signal ist periodisch, wenn gilt:

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$ mit m,N ganzzahlig, dabei ist N die Periode des Signals

Dann lässt sich die zeitdiskrete Fourierreihe bilden:

$$\tilde{x}(n) = \sum_{n=0}^{N-1} a_k \cdot e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$$

mit den Koeffizienten:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \cdot e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

Dieses im zeitbereich periodische Signal besitzt ein diskretes Linienspektrum, das mit $\Omega_a = 2\pi$ periodisch ist.

5.2 Zeitdiskrete Fourier-Transformation (ZDFT)

Die zeitdiskrete Fourier-Transformation wird folgendermaßen definiert:

$$X(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-jn\Omega}$$

Nichtperiodische Signale besitzen ein kontinuierliches Spektrum, das ebenfalls mit $\Omega_a = 2\pi$ periodisch ist.

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0 Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de

5.3 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Da die unendliche Grenzen der ZDFT mit Rechner problematisch zu realisieren sind, wird die Eingangsfunktion „gefenstert“, d.h. mit einer Fensterfunktion bewertet, es werden also nur N Antastwerte verwendet.
Dies führt zu einer Verfälschung des Spektrums.
Die normierte Frequenz W wird diskretisiert:

$$\Omega \Rightarrow \Omega_k = 2\pi \frac{k}{N}$$

Daraus folgt, das die Spektralwerte nur noch bei den diskreten Frequenzen Ω_k berechnet werden. Im zeitkontinuierlichen Fall ist das Spektrum kontinuierlich, d.h. es gibt keine Spektrallinien.

Da im zeitdiskreten Fall nur die diskreten Frequenzen Ω_k auftreten, entspricht die Diskretisierung einer „Abtastung“ im Frequenzbereich. Es werden nur bei definierten Frequenzen die Amplituden aus dem kontinuierlichen Spektrum „übernommen“.

Der Abstand der Spektrallinien ist

$$\Delta\Omega_k = \frac{2\pi}{N}$$

Durch die Abtastung wird das Spektrum periodisch fortgesetzt.
Daraus ergibt sich für die DFT zeitlich periodischer Signalen die Forderung, die Fensterbreite (die Anzahl N der Abtastwerte) gleich einem ganzzahligen Vielfachen der Periodendauer zu wählen, um zusätzliche Verfälschungen zu vermeiden.

5.4 Die schnelle Fourier-Transformation

Mit Hilfe der DFT kann ein abgetastetes Signal mit dem Rechner fourier-transformiert werden. Der Nachteil der DFT ist der hohe Rechneraufwand. Mit steigender Fensterbreite N steigt der Rechenaufwand quadratisch an.

Die schnelle Fourier-Transformation ist ein Algorithmus zu einer schnelleren Berechnung der DFT. Die Ergebnisse entsprechen denen der DFT.

Die folgende Tabelle vergleicht den Rechenaufwand zwischen DFT und FFT. Angeben ist die Anzahl der erforderlichen komplexen Rechenoperationen:

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0 Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de

Tabelle 1: Vergleich der Anzahl der benötigten komplexen Rechenoperationen zwischen DFT und FFT

Punkte	DFT	FFT	Faktor
2	4	2	2,0
4	16	8	2,0
8	64	24	2,7
16	256	64	4,0
32	1024	160	6,4
64	4096	384	10,7
128	16384	896	18,3
256	65536	2048	32,0
512	262144	4608	56,9
1024	1048576	10240	102,4
2048	4194304	22528	186,2
4096	16777216	49152	341,3
8192	67108864	106496	630,2
16384	268435456	229376	1170,3

Dies ist nur eine grobe Abschätzung. Aus der Tabelle ist zu entnehmen, das der Aufwand der FFT nicht annähert so schnell steigt wie bei der DFT. Eine 1024-Punkte-FFT um den Fakter 102-mal weniger Rechenoperationen als eine 1024-Punkte-DFT.

5.5 Bedeutung der Fourier-Transformation

Im Zeitbereich wird ein Signal durch seinen zeitlichen Verlauf definiert. Es wird eine Amplitude über der Zeit aufgetragen.
Im Frequenzbereich wird eine Amplitude über der Frequenz aufgetragen (Amplituden im Zeit- und Frequenzbereich sind verschieden!). Da ein Zeitsignal in den Frequenzbereich transformiert werden kann, gibt es einen Zusammenhang zwischen zeitlichen Verlauf und Frequenz-Anteilen.

Da alle in der wirklichen (realen) Welt vorhandenen Signale Zeitsignale sind, kann daraus geschlossen werden, das mit Hilfe der Fourier-Transformation ein Zeitsignal in seine Frequenzanteile zerlegt werden kann.

Aus den dargestellten Zeitsignalen ist Bestimmung der Schwingungsanteile nur durch sehr viel Erfahrung und mathematisches Wissen möglich.
Mit der Fourier-Transformation können die Schwingungsanteile und ihre Verhältnisse zueinander sehr genau berechnet und anschaulich dargestellt werden.

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0 Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de

5.5.1 Beispiel: Überlagerte Sinus-Schwingungen

Im folgenden Beispiel wird das Eingangssignal durch die Addition von zwei Sinus-Schwingungen (50Hz und 100Hz) gebildet. In der linken Hälfte sind die maximalen Amplituden gleich. In der rechten Hälfte ist die maximale Amplitude der 2.Schwingung (100Hz) halb so groß. Die Frequenz-Spektren wurden mit Hilfe der FFT, der schnellen Fourier-Transformation, berechnet. Da die FFT mit diskreten Wertfolgen arbeitet, wurde das Eingangssignal abgetastet. Die Amplituden der Schwingungen bei 50Hz und 100Hz sind gut zu erkennen.

Aus den dargestellten Zeitsignalen ist Bestimmung der Schwingungsanteile nur durch sehr viel Erfahrung und mathematisches Wissen möglich.
Mit der Fourier-Transformation können die Schwingungsanteile und ihre Verhältnisse zueinander sehr genau berechnet und anschaulich dargestellt werden.

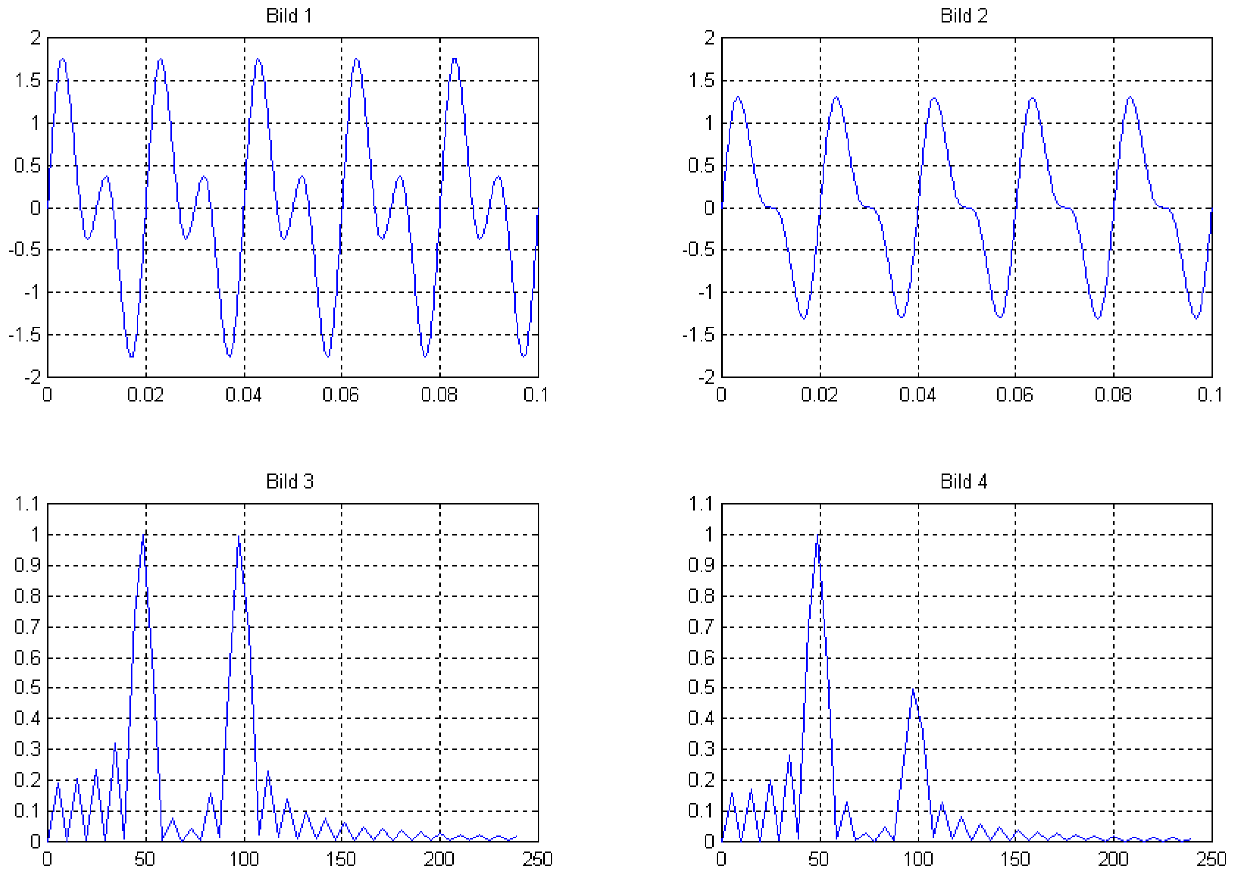


Abbildung 4: Zeitsignal und Frequenzspektrum zweier überlagerter Sinus-Schwingungen

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0   Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de

5.5.2 Beispiel 2: Überlagerte Sinus-Schwingungen mit Rauschen

Den beiden Signalen aus dem obigen Beispiel wird nun ein Rauschsignal überlagert. Die Zeitsignale (obere Reihe) sind kaum zu unterscheiden. Die Frequenzspektren zeigen dennoch die unterschiedlichen Amplituden der 100Hz-Schwingungen.

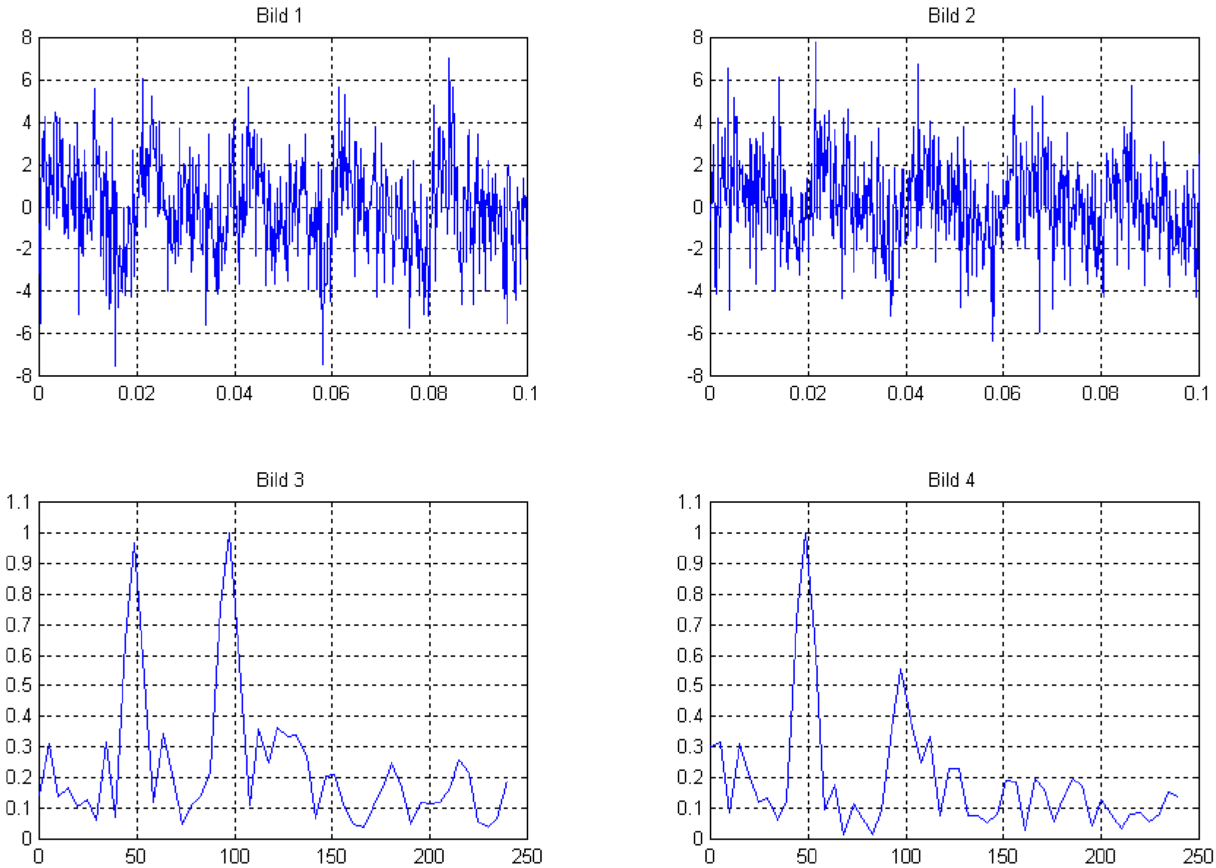


Abbildung 5: Zeitverlauf und Frequenzspektrum zwei überlagerter Sinus-Schwingungen mit Störrauschen

Durch das Rauschsignal treten noch weitere Störfrequenzen im Spektrum auf. Durch Filterung können diese Störanteile minimiert werden.

Die Karten der MultiChoice-PCI-Reihe und die MultiChoice-Quattro ein gemessenes Signal einer FFT-Filterung unterziehen und das gefilterte Signal dem PC übergeben.

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0   Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de

6 Rekursive (IIR-) Filter und nichtrekursive (FIR-) Filter

Grundsätzlich gibt es zwei verschiedene Typen von zeitdiskreten Filtern, einmal rekursive Filter (IIR) mit unendlicher Impulsantwort und nicht rekursiver Filter mit endlicher Impulsantwort.

6.1 Nicht rekursive Filter (FIR)

FIR-Filter haben einen linearen Phasengang und damit konstante Gruppenlaufzeiten, d.h., die Gruppenlaufzeit ist frequenzunabhängig. Somit bleibt das Phasenspektrum am Ausgang des Filters unverändert. Damit eignet sich das FIR-Filter gut zum Filtern eines Messsignals, das anschließend z.B. visualisiert oder weiterverarbeitet werden soll. Des Weiteren sind FIR-Filter immer stabil..
Der Nachteil ist eine größere Gruppenlaufzeit als bei rekursiven (IIR-) Filtern, die z.B. bei digitalen Regelkreisen meistens unerwünscht sind.

Die Karten der MultiChoice-PCI-Reihe und die MultiChoice-Quattro können unabhängig vom PC ein gemessenes Signal einer FIR-Filterung unterziehen und das gefilterte Signal dem PC übergeben.

6.2 Rekursive Filter (IIR)

IIR-Filter haben einen nichtlinearen Phasengang und eine nicht-konstante Gruppenlaufzeit, d.h., die Gruppenlaufzeit ist frequenzabhängig. Das Phasenspektrum des Ausgangssignals ist gegenüber dem Eingangssignal verändert.
IIR-Filter sind immer auf Stabilität zu prüfen.

Die Karten der MultiChoice-PCI-Reihe und die MultiChoice-Quattro können unabhängig vom PC ein gemessenes Signal einer IIR-Filterung unterziehen und das gefilterte Signal dem PC übergeben.

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0 Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de

6.3 Vor- und Nachteile von FIR- und IIR-Filter auf einen Blick

Tabelle 2: Vergleich FIR- und IIR-Filter

FIR Filter		IIR Filter	
Vorteile	**Nachteile**	**Vorteile**	**Nachteile**
immer Stabil			nicht immer Stabil
	viele Koeffizienten	wenig Koeffizienten	
konstante Gruppenlaufzeiten	große Gruppenlaufzeiten	Kleine Gruppenlaufzeiten	variable Gruppenlaufzeiten
	hoher Rechenaufwand des Filters	geringer Rechenaufwand des Filters	
	endliche Impulsantwort	unendliche Impulsantwort	

6.4 Funktionsweise und Entwurf von FIR- und IIR-Filtern

Die Funktionsweise eines Filters lässt sich am einfachsten im Frequenzbereich erläutern. Im Frequenzbereich wird das fouriertransformierte Eingangssignal mit einer Übertragungsfunktion multipliziert, die dem Frequenzgang des Filters beschreibt.

Mit Filtern lassen sich realisieren:

Tiefpässe	hochfrequente Anteile werden unterdrückt
Hochpässe	tieffrequente Anteile werden unterdrückt
Bandpässe	Frequenzen außerhalb eines bestimmten Bereiches werden unterdrückt
Bandsperren	Frequenzen innerhalb eines bestimmten Bereiches werden unterdrückt

Bei digitalen Filtern ist Realisierung eines Hochpasses problematisch, da AD-Wandler nur endliche Abtastfrequenzen zulassen.

6.4.1 Entwurf von digitalen FIR-Filtern

Für den Entwurf digitaler FIR-Filter existieren eine Reihe von Entwurfsverfahren zu Berechnung der notwendigen Koeffizienten. Allen gemeinsam ist die Nachbildung eines vorgegebenen idealen Filter-Frequenzganges. Da nur eine endliche Anzahl Koeffizienten genutzt wird, wird diese ideale Übertragungsfunktion nur angenähert. Es entstehen im Durchlass- und Sperrbereich Überschwinger, die je nach Entwurfsverfahren und Fensterfunktion unterschiedlich stark sein können.

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0 Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de

In Abbildung 6 sind die Frequenzgänge (die Übertragungsfunktionen) verschiedener FIR-Filter dargestellt. Auf der X-Achse ist die auf die Abtastfrequenz normierte Frequenz Ω aufgetragen.

Die Verwendung der normierten Frequenz ermöglicht den Vergleich von Filtern, die für verschiedene Abtastfrequenzen entworfen wurden.

<u>Beispiel:</u>

Es wird ein Frequenzgang für eine Abtastfrequenz f_{a1} berechnet. Die Frequenz, ab der das Eingangssignal begrenzt werden soll, soll

$$f_{g1} = \frac{f_{a1}}{4}$$

sein.

Verwendet man das so entworfene Filter mit der doppelten Frequenz $f_{a2} = 2\, f_{a1}$, stellt man fest, dass das Filter nicht wie erwartet bei f_{g1} das Frequenzspektrum begrenzt, sondern bei

$$f_{g2} = \frac{f_{a2}}{4} = 2\, f_{g1} .$$

Daher bietet sich die normierte Darstellung an. Es kann eine Berechnung der Filter-Koeffizienten unabhängig der Abtastfrequenz durchgeführt werden. Auch lassen sich so die Frequenzgänge von Filtern mit verschiedenen Abtastraten z.B. bzgl. des Überganges vom Durchlass- in den Sperrbereich vergleichen.

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0 Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de

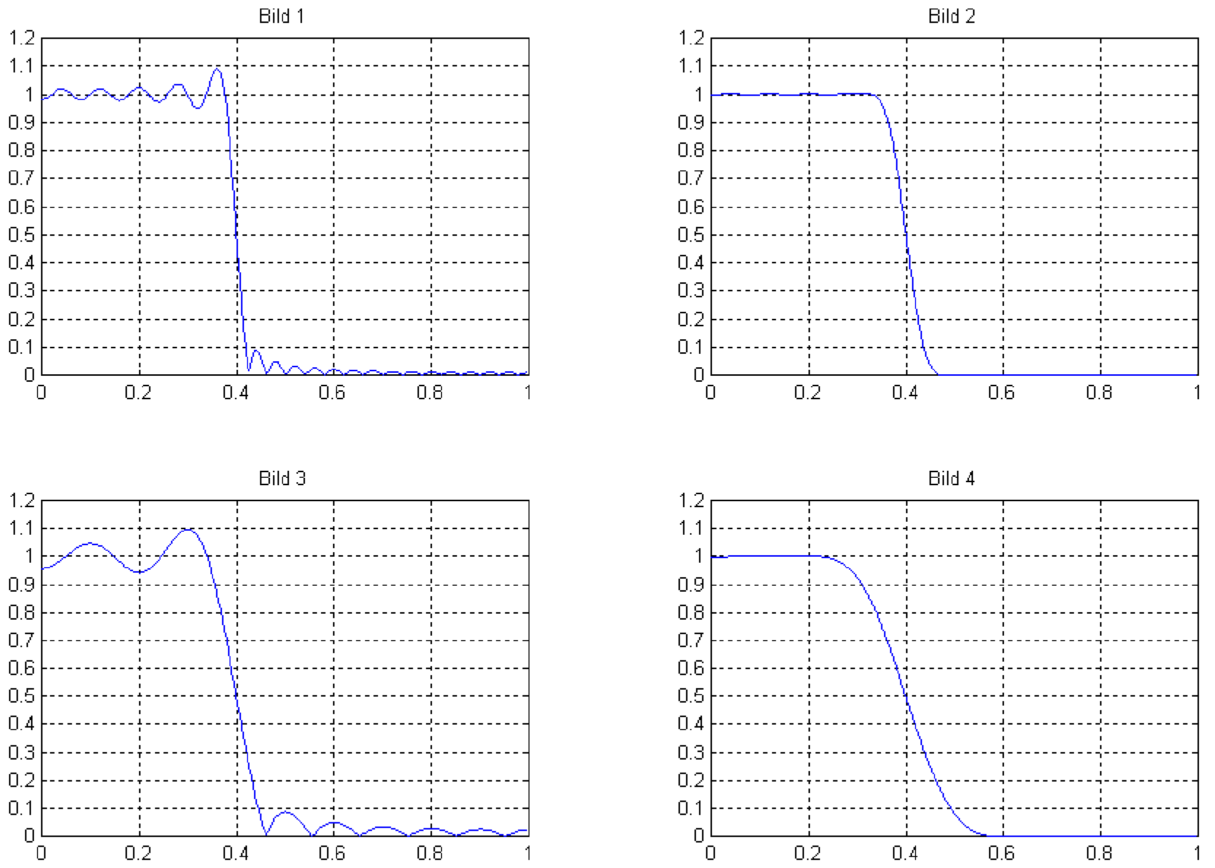


Abbildung 6: Darstellung der Frequenzgänge von FIR-Filtern, links ohne, rechts mit Hamming-Fenster gewichtet

In Bild 1+3 von Abbildung 6 sind die Übertragungsfunktionen mit einem Rechteckfenster gebildet wurden. Dabei wird die Übertragungsfunktion einfach abgeschnitten. In Bild 2+4 sind die Übertragungsfunktionen mit einem Hamming-Fenster bewertet. Dieses Fenster schneidet die Übertragungsfunktion nicht ab, sondern sorgt für einen weicheren Übergang. In Bild 1+2 verfügt die Übertragungsfunktion über 51 Koeffizenten, in den Bildern 3+4 nur über 21 Koeffizienten.
Hier sind linearphasige FIR-Filter berechnet worden. Bei diesen entspricht die Anzahl der Koeffizienten der Ordnung des Filters.
Abbildung 6 zeigt, das die höhere Ordnung eines Filters eine steilere Filterflanke ermöglicht. Dies wird erkauft mit größeren Gruppenlaufzeiten, größerer Rechenaufwand und größerer Speicherplatzbedarf.
Es ist ebenfalls zu erkennen, das die Bewertung mit einer Fenster-Funktion die Überschwinger im Durchlass- und Sperrbereich stark reduziert, die Filterflanke allerdings abgeflacht wird. Eine Erhöhung der Ordnung kann dieses wieder kompensieren.

6.4.2 Funktionsweise eines Filters im Frequenzbereich

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0 Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de

Die Funktionsweise eines digitalen Filters lässt sich im Frequenzbereich sehr einfach beschreiben:

Die Eingangsfunktion wird digitalisiert und mit Hilfe der FFT transformiert. Das daraus gebildete Spektrum wird mit dem Frequenzgang der Filter-Übertragungsfunktion multipliziert und damit bewertet. Dazu werden die Koeffizienten einer Frequenz aus dem Eingangsspektrum mit dem zugehörigen Koeffizienten aus dem Spektrum der Übertragungsfunktion multipliziert und anschließend in das Ausgangsspektrum übertragen.
Anders ausgedrückt, das Frequenzspektrum des Eingangssignals wird mit der Übertragungsfunktion des Filters gewichtet. Die Frequenzen des Eingangsspektrums werden entsprechend dem Frequenzgang der Übertragungsfunktion verstärkt oder gedämpft. Sehr stark gedämpfte Frequenzen sind im Ausgangsspektrum praktisch nicht vorhanden. Wird dieses Ausgangsspektrum wieder zurück in den Zeitbereich transformiert, ist das Ausgangssignal gegenüber dem Eingangssignal verändert.

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0 Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de

7 Beispiel: Rechteck-Signal

Im weiteren wird ein Rechteck-Signal mit einer Signalfrequenz von 100Hz betrachtet. Auf dieses Signal werden verschiedene FIR-Filter angewendet und die resultierenden Frequenzspektren mittels FFT berechnet.
Abbildung 7 zeigt den Zeitverlauf, Abbildung 8 die Frequenzspektren.

Oben ist jeweils das unbearbeitete Signal dargestellt. Neben der Frequenz bei 100Hz (der Grundfrequenz) sind im Rechteck-Signal noch weitere Frequenzen enthalten (Oberwellen). Theoretisch sind unendlich viele Oberwellen im Signal enthalten.
Der mittlere Kurvenverlauf zeigt das Rechteck-Signal nach einer FIR-Filterung mit einer Grenzfrequenz von 550Hz. Frequenzen oberhalb dieser Frequenz werden unterdrückt. Der zeitliche Verlauf weist eine starke Welligkeit auf. Im Frequenzspektrum sind nur noch 3 Frequenzanteile enthalten.
Unten wurde das Rechteck-Signal einer Filterung mit der Grenzfrequenz 225Hz unterzogen. Das Filter unterdrückt alle Oberwellen, nur die Grundfrequenz bleibt erhalten. Daher wird aus dem Rechteck ein Sinussignal erzeugt.

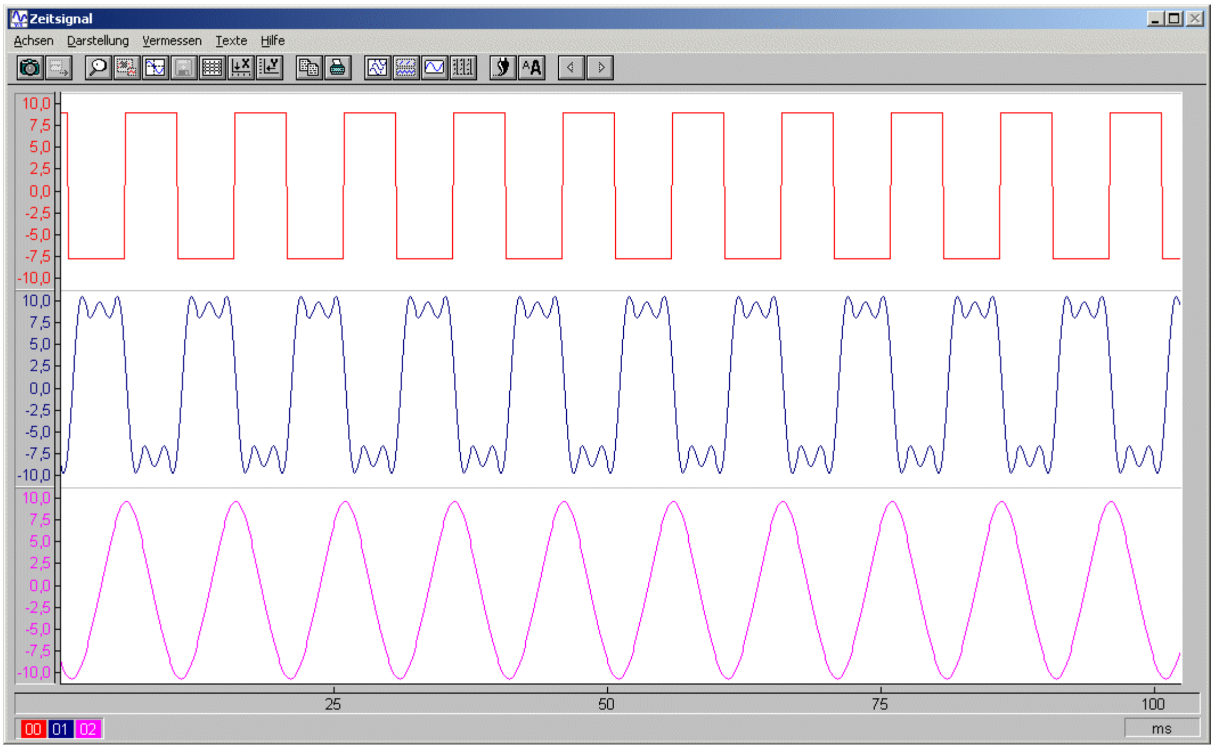


Abbildung 7: Zeitverlauf des Rechteck-Signals, oben ohne Filterung, mitte Grenzfrequenz 550Hz, unten Grenzfrequenz 225Hz

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0 Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de

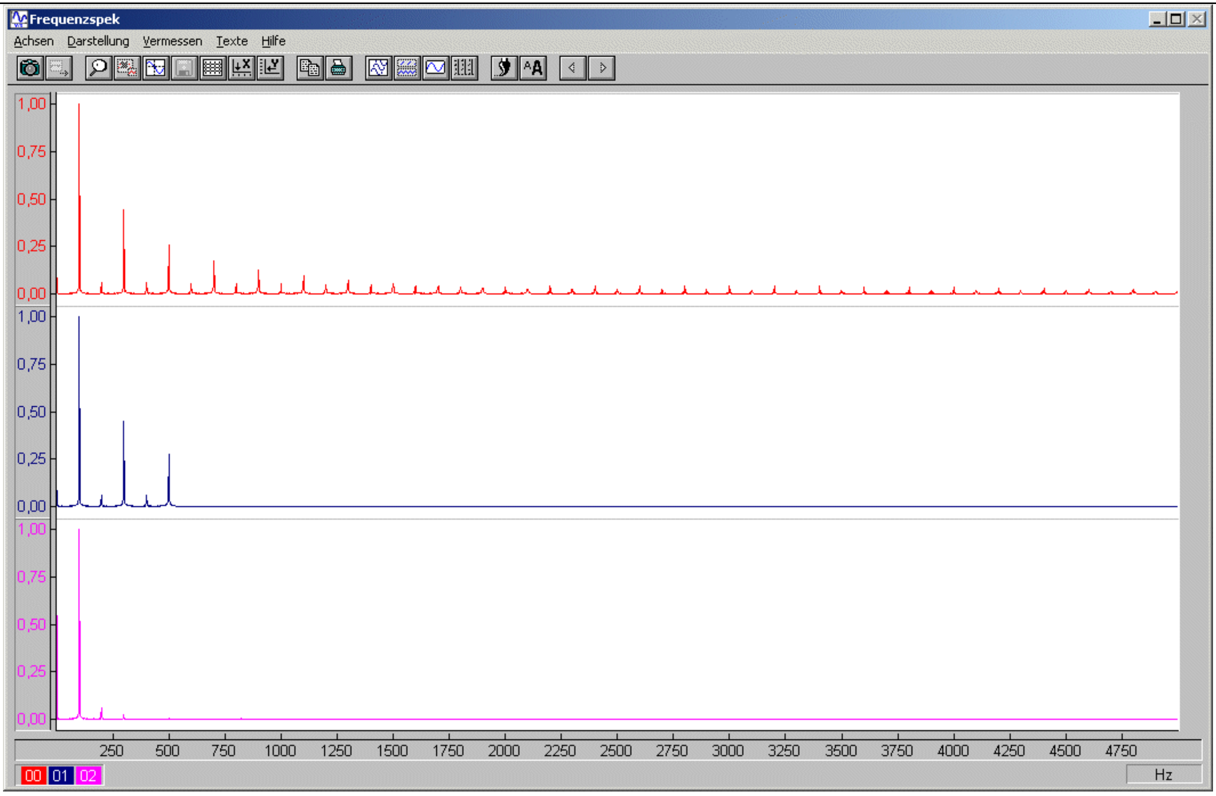


Abbildung 8: Frequenzspektren des Rechteck-Signals, oben ohne Filterung, mitte Grenzfrequenz 550Hz, unten Grenzfrequenz 225Hz

Goldammer Hard- und Software GmbH
Schlosserstraße 6, 38440 Wolfsburg
Tel. 05361 / 2995-0 Fax. 05361 / 2995-29
www.goldammer.de